

CUPRINS

Partea I

<i>Teme recapitulative</i>	5
1. Mulțimi de numere. Mulțimi și elemente de logică matematică	6
2. Șiruri. Progresii aritmetice și geometrice.....	11
3. Funcții. Proprietăți generale.....	17
4. Funcția de gradul întâi și funcția de gradul al doilea	22
5. Puteri și radicali. Ecuatii iraționale.....	28
6. Funcția exponențială și funcția logaritmică. Ecuatii.....	32
7. Numere complexe	37
8. Metode de numărare. Elemente de combinatorică. Binomul lui Newton	46
9. Geometrie vectorială și geometrie analitică.....	54
10. Elemente de trigonometrie. Aplicații ale trigonometriei în geometrie	63
11. Permutări. Matrice. Determinanți	73
12. Sisteme de ecuații liniare	85
13. Structuri algebrice.....	93
14. Polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ	101
15. Limite de șiruri. Limite de funcții.....	109
16. Funcții continue.	122
17. Funcții derivabile. Tangente la graficul funcției. Proprietățile funcțiilor derivabile pe un interval.....	127
18. Primitive	139
19. Funcții integrabile.....	147

Partea a II-a

<i>Teste de evaluare tip Bacalaureat (1–33)</i>	157
---	-----

Partea a III-a

<i>Subiecte date sau propuse la examenul de Bacalaureat în anii 2014-2017</i>	225
---	-----

Răspunsuri

I. Teme recapitulative.....	246
II. Teste de evaluare tip Bacalaureat.....	349
III. Bareme de notare pentru subiectele date la examenul de Bacalaureat în anii 2014-2017.....	388

Mulțimi de numere. Mulțimi și elemente de logică matematică

IMPORTANT!

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Se notează $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mulțimea numerelor iraționale.
- Între două numere reale diferite $x < y$ există cel puțin un număr rațional r și cel puțin un număr irațional α a.î. $x < r < y$ și $x < \alpha < y$.
- Oricare ar fi numerele reale $x > 0$ și y , există un număr natural n astfel încât $nx > y$ (Axioma lui Arhimede).
- Modulul unui număr real x se definește astfel: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.
- Proprietățile modulului:
 1. $|x| \geq 0$; egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = 0$.
 2. $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
 3. $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
 4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
 5. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*$.
 6. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ sau } x = -y$.
 7. Fie $\varepsilon > 0$; $|x| = \varepsilon \Leftrightarrow x = \varepsilon \text{ sau } x = -\varepsilon$.
 8. $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.
 9. $|x| \geq \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty)$.
- Fie $x \in \mathbb{R}$; se numește parte întreagă a numărului real x numărul întreg n pentru care $x \in [n, n+1)$. Notăm $n = [x]$.
- Diferența $x - [x]$ se numește partea fracționară a numărului x și se notează $\{x\}$.

Proprietăți: 1. $[x] \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$

2. $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

3. $\{x\} \in [0, 1), \forall x \in \mathbb{R}$.

4. $[x + p] = [x] + p, \forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}$.

EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Demonstrați că $(1 + \sqrt{2013})^7 + (1 - \sqrt{2013})^7 \in \mathbb{N}$.
2. Demonstrați că $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} \in \left(\frac{7}{8}; \frac{9}{10}\right)$.
3. Verificați inegalitatea $\sqrt[3]{11} < \frac{\sqrt[3]{11} + \sqrt{5}}{2} < \sqrt{5}$.
4. Determinați numărul $\left[\frac{\sqrt{7}}{\{\sqrt{7}\}} \right]$, unde prin $[x]$ și $\{x\}$ se înțelege partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .
5. Se consideră numărul rațional $\frac{3}{7}$ scris în formă de fracție zecimală infinită $\frac{3}{7} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$. Calculați $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2013}$.
6. Demonstrați că $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}} \in \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
7. Să se determine valoarea de adevăr a propoziției p : „oricare ar fi numărul real x , $x \cdot (8 - x) \leq 16$ ”.
8. Să se rezolve ecuația $\left[\frac{x-5}{4} \right] = \frac{x-10}{3}$, unde prin $[a]$ se înțelege partea întreagă a numărului real a .
9. Se consideră expresia $E(x) = x^2 - 5x + 3 \in \mathbb{R}$. Găsiți un număr irațional a , astfel încât $E(a)$ să fie număr natural.
10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:
 - a) $|x - 5| = 3$;
 - b) $|3 - 3x| = |2x + 8|$.
11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:
 - a) $|3 + 4x| \leq 2$;
 - b) $|2x - 4| \geq 5$.
12. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției „Dacă $x \in [2, 4]$ și $y \in [-2, 3]$, atunci $x - y \in [-1, 6]$ ”.
13. Fie a, b, α, β numere raționale. Demonstrați că $a + b\sqrt{3} = \alpha + \beta\sqrt{3}$ dacă și numai dacă $a = \alpha$ și $b = \beta$.
14. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|3x - 2| = -4x + 3$.
15. Calculați $[\sqrt{2013}] + 3 \left\{ -\frac{1}{2013} \right\}$, unde prin $[x]$ și $\{x\}$ se înțelege partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .
16. Demonstrați că $\sqrt{5} \notin \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
17. Rezolvați în $\mathbb{R}$, inecuația $|x - |x|| < 2$.

18. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este divizibil cu } 6\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este divizibil cu } 9\}$. Să se arate că mulțimea $A \cap B$ are 56 de elemente mai mici decât 1000.

19. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $|2x-1| + 2|x+3| = 6$.

20. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $[x] \cdot \{x\} = 2013x$.

21. Demonstrați că oricare ar fi numerele reale x, y și z , are loc inegalitatea $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x+y+z)$.

22. Calculați $S = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{2013}]$.

23. Fie predicatul binar $p(x, y)$: „ $x = y^2 + 3$, unde $x, y \in \mathbb{R}$ ”. Determinați valoarea de adevăr pentru fiecare dintre propozițiile:

- a) $(\exists x)(\exists y)p(x, y)$; b) $(\forall x)(\exists y)p(x, y)$;
c) $(\exists x)(\forall y)p(x, y)$; d) $(\forall y)(\exists x)p(x, y)$.

24. Fie predicatul binar $p(x, y)$: „ $x \cdot (y-3) = 0$, unde $x, y \in \mathbb{R}$ ”. Determinați valoarea de adevăr pentru fiecare dintre propozițiile:

- a) $(\exists x)(\exists y)p(x, y)$; b) $(\forall x)(\exists y)p(x, y)$;
c) $(\exists x)(\forall y)p(x, y)$; d) $(\forall y)(\exists x)p(x, y)$.

25. Determinați valoarea de adevăr a propoziției „media aritmetică a numerelor $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ și $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$ este un număr natural”.

26. Ordonăți crescător numerele $a = 2,013$; $b = 2,0(13)$; $c = 2,(013)$.

27. Demonstrați că $A = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$ este număr natural.

28. Demonstrați că pentru orice număr natural n , are loc relația $(5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}) : 19$.

29. Determinați mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2 - 6x + 14} \in \mathbb{N}\}$.

30. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$E = \frac{x^2+1}{x+3} + \frac{3x}{x+3} - \frac{1}{x+3}.$$

31. Comparați numerele:

$$a = \sqrt{3-\sqrt{8}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}}; b = \sqrt{24} + \sqrt{15+6\sqrt{6}}.$$

32. Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 2\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq 2x+1 < 5\}$.

Calculați $A \cap B, A \setminus B, B \cap \mathbb{Z}, A \cap \mathbb{N}$.

33. Rezolvați ecuația $\left[\frac{3x-1}{2} \right] = x$.

34. Calculați $\frac{4x^2 - 25}{4x^2 + 20x + 25} \cdot \frac{2x^2 - 5}{2x + 5}$.

35. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Arătați că $\frac{7a+4b}{11} \in (a, b)$.

36. Fie $a > 0, x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x - y| \leq a$. Arătați că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x - c| \leq \frac{a}{2}$ și $|y - c| \leq \frac{a}{2}$.

37. Rezolvați sistemul: $\begin{cases} x + [y] = 13,9 \\ [x] + 2y = 24,3 \end{cases}$.

38. Arătați că, dacă $a, b \in (0, 2)$, atunci $|a| + \sqrt{a^2 - 4a + 4} + 2b < 6$.

39. Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt{x^2 + 8x + 16} \leq 5$.

40. Calculați în funcție de n produsul $P = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

41. Calculați partea fracționară a numărului $S = \sum_{k=1}^{n^2-1} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$.

42. Calculați valoarea numărului $E = \frac{\sqrt{4} + \sqrt{5}}{\sqrt{20}} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{6}}{\sqrt{30}} + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{6}}{\sqrt{24}}$.

43. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $|x+1| + |x^2+1| + \dots + |x^{2007}+1| = 0$.

44. Rezolvați inecuația: $\left| \frac{x-1}{x+2} \right| + \left| \frac{x+2}{x-1} \right| \leq 2$.

45. Determinați mulțimea: $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x^2 + 4x + y^2 + 6y = -13\}$.

46. Calculați partea fracționară a numărului a , unde $a = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k}, n \geq 2$.

47. Determinați două numere iraționale cu proprietatea că suma și produsul acestora sunt numere raționale strict pozitive.

48. Fie $a = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{9} - \sqrt{10}}{\sqrt{90}}$ și

$b = \left[\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^{100} + \left(\frac{1}{\sqrt{5}+1} \right)^{100} \right] (\sqrt{50} + \sqrt{10})^{101}$. Calculați a și b și media

geometrică a numerelor $|a|$ și b .

49. a) Aduceți la o formă mai simplă expresia:

$E = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} \right) - \frac{1}{x(x+1)(x+2)}, x > 0$.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Subiectul I

30p

- 5p 1. Să se determine modulele rădăcinilor ecuației: $z^4 + 4z^2 + 8 = 0$.
- 5p 2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5x + 6$. Se cere $[\sqrt{f(2013)}]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .
- 5p 3. Să se rezolve ecuația: $\lg(2x + 3) + \lg(4x - 1) = \lg 3 + \lg 5$.
- 5p 4. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $a = \{100, 101, 102, \dots, 2014\}$ acesta să fie divizibil cu 16.
- 5p 5. Să se rezolve ecuația $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2$.
- 5p 6. Se dă triunghiul ABC , cu $AB = 1$, $AC = 2$ și $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$. Se cere lungimea înălțimii din B .

Subiectul II

30p

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ și matricea

$$A \in M_3(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

- 5p a) Să se determine rangul matricei A .
- 5p b) Să se calculeze matricea $B = A^2 + aA + bI_3$.
- 5p c) Se consideră punctele $A_n(n, f(n)) \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că aria triunghiului $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ este constantă.
2. Polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = 3X^4 - 10X^3 + aX^2 + 10X + 3$ are rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3, x_4 .
- 5p a) Să se determine $a \in \mathbb{Q}$, dacă $x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$.
- 5p b) Să se arate că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{100 - 6a}{9}$.
- 5p c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât rădăcinile lui f să fie reale.

Subiectul III

30p

Respect pentru oameni și cărți

1. Fie $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n + \ln x}{x}$, $n \in \mathbb{N}$.

- 5p a) Să se găsească asimptotele funcției $f_0(x)$.
 5p b) Determinați intervalele de convexitate ale lui $f_1(x)$.
 5p c) Fie A_n punctul în care graficul f_n intersectează axa Ox , T_n punctul de pe grafic unde tangenta trece prin origine, B_n punctul de maxim al funcției $f_n(x)$ și I_n punctul de inflexiune al lui $f_n(x)$. Să se arate că abscisele lor sunt în progresie geometrică.

2. Se dă funcția $f_n : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{x-1}{(x+1)^n}$ și $I_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_n(x) \cdot dx$.

5p a) Să se calculeze $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_0(x) \cdot f_1(x) \cdot dx$.

5p b) Să se calculeze I_n .

5p c) Aflați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \cdot I_n}{2^{n-2}} \right)$.